LA TESIS DE RIEMANN SOBRE LAS SERIES TRIGONOMÉTRICAS

ANTONIO CÓRDOBA BARBA

Bernhard Riemann, a pesar de su corta vida, está generalmente considerado como uno de los más universales, fecundos y originales creadores de todos los tiempos, ocupando, junto a los Arquímedes, Newton, Euler, Gauss, Hilbert y Poincaré, la posición más excelsa del Olimpo de las Matemáticas. Su obra, al mismo tiempo clásica y revolucionaria, ha tenido, y sigue aún teniendo, una influencia profunda en muchas y variadas áreas: en Geometría y en Teoría de los Números, por supuesto, pero también en Física y en el Análisis Matemático.

Si juzgamos por su tesis doctoral del año 1851 en la universidad de Göttingen: "Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja" (*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*), o por su primera tesis de Habilitación presentada en la misma universidad, tres años después, y titulada: "Sobre la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica" (*Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*), podríamos afirmar que, al menos durante los comienzos de su carrera, Riemann era, mayormente, un analista.

Cumpliendo con los requisitos de Göttingen presentó también una segunda Tesis de Habilitación titulada "Sobre las hipótesis en las que se funda la Geometría" (*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*), siendo una anécdota muy conocida que Gauss, rompiendo con la tradición establecida en aquella Universidad, le pidió defender públicamente esta segunda opción, que tanta influencia ha tenido luego en el desarrollo y evolución posteriores de nuestras nociones de espacio y de estructura geométrica. Habiéndose convertido, con toda justicia, en un hito famoso de la historia de nuestra ciencia.

Pero la primera tesis, aunque sea menos popular y esté quizás un tanto oscurecida por la fama de la segunda, es también una maravilla. La preparación de este trabajo me ha brindado la oportunidad de volver a leerla con cuidado, siendo mi propósito compartir esa lectura con Uds. Pero a sabiendas de que mis comentarios no podrán nunca hacerle justicia, aunque consideraré un éxito que mis reflexiones puedan servir para animarles a estudiarla y aprender directamente de tan magnífica obra.

La tesis está estructurada en cuatro partes. En la primera describe de forma breve, pero precisa y amena, la historia y los antecedentes del problema de la representación de funciones "arbitrarias" por medio de series trigonométricas. Riemann detecta a los personajes fundamentales de la trama, a saber: D'Alembert, Euler, Bernoulli (Daniel), Lagrange, Fourier y Dirichlet. En un lenguaje muy claro nos ilustra de la cuestión en querella y de las contribuciones y puntos de vista de cada uno de esos artistas. En la parte segunda inicia su propio camino, que le conduce a la definición de la integral que ahora lleva su nombre y a la caracterización de las funciones que son integrables, presentando varios ejemplos que muestran la potencia, y las limitaciones, de la nueva definición. En ese empeño se demora en aclarar la diferencia entre continuidad y diferenciabilidad, ofreciéndonos los primeros ejemplos conocidos de funciones continuas que carecen de derivada en un conjunto denso de puntos, surgiendo naturalmente la pregunta: ¿habrá una función continua que no sea derivable en todos sus puntos?

En la tercera parte Riemann plantea el problema de la unicidad de los desarrollos trigonométricos y resuelve su caso más básico. Pero para hacerlo se ve obligado, entre otros logros, a generalizar el concepto de derivada segunda de una función. Luego Cantor prosiguió este análisis, lo que le llevó a crear la teoría de conjuntos y a preguntarse sobre la existencia de un conjunto de números reales cuyo cardinal esté estrictamente contenido entre el de los naturales y el de todos los reales. Es decir, a formular la hipótesis del continuo, cuya naturaleza independiente de los otros axiomas fue dilucidada por P. Cohen, en torno al año 1960. Por cierto que Cohen había realizado su tesis doctoral [10] en la Universidad de Chicago, dirigida por A. Zygmund, y ésta versó, precisamente, sobre el problema de la unicidad formulado por

Riemann. Finalmente, la parte cuarta de la tesis contiene varios ejemplos que nos ilustran sobre la complejidad y la diversidad de las series trigonométricas.

A lo largo de la memoria aparece repetidamente el empeño de tratar "funciones arbitrarias" e ir más allá de lo obtenido por Dirichlet y otros autores anteriores. Para entender el contexto y la presentación histórica, conviene pues considerar el concepto de función que se tenía en los primeros escritos de Euler y Lagrange (aunque en los postreros lo modificaron un poco, acercándose al actual) y su evolución hasta la época de Riemann, lo que queda patente en los textos siguientes:

- L. Euler (1748): *Instituciones calculi differentialis.*

    1. *Quantitas constans est quantitas determinata perpetuo eundem valorem servans.*
    2. *Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.*
    3. *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*

Que podemos traducir así:

1. Una cantidad constante es una cantidad determinada que mantiene permanentemente el mismo valor.
2. Una cantidad variable es una cantidad universal o indeterminada que contiene en sí misma todos los valores determinados.
3. Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o constantes.

- J. L. Lagrange (1797): *Théorie des fonctions analytiques.*

    On appelle function d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs posibles. Ainsi, dans les

> *fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.*
>
> Se llama función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la que estas cantidades entren de una manera arbitraria, mezcladas o no con otras cantidades a las que se considera teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles. Así, en las funciones, no se consideran más que las cantidades que se han supuesto variables, sin tener en cuenta a las constantes que puedan aparecer allí mezcladas.

• B. Riemann (1851): *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.*

> *Denkt man sich unter z eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle möglichen reellen Werthe annehmen kann, so wird, wenn jedem ihrer Werthe ein einziger Werth der unbestimmten Grösse w entspricht, w eine Function von z genannt,* [...] *Diese Definition setzt offenbar zwischen den einzelnen Werthen der Function durchaus kein Gesetz fest, indem, wenn über diese Function für ein bestimmtes Intervall verfügt ist, die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb desselben ganz der Willkür überlassen bleibt.* [...] *Es ist daher einerlei, ob man die Abhängigkeit der Grösse w von der Grösse z als eine willkürlich gegebene oder als eine durch bestimmte Grössenoperationen bedingte definiert.*
>
> Supongamos que z es una cantidad variable que puede asumir, gradualmente, todos los valores reales posibles, entonces, si a cada uno de sus valores corresponde un valor único de la cantidad indeterminada w, diremos que w es una función de z, [...] Esta definición no establece ninguna ley entre los distintos valores tomados por la función, con lo que si se conoce esta función en un cierto

> intervalo, la forma de su continuación fuera de ese intervalo sigue siendo completamente arbitraria. [...] Es por lo tanto indiferente definir la dependencia de la cantidad w respecto de la cantidad z de una manera arbitraria o por medio de ciertas operaciones entre las cantidades involucradas.

1. Parte I de la Tesis: *Historia de la cuestión de la representabilidad de una función arbitraria por una serie trigonométrica*

Esta parte es una síntesis, ágil, clara y precisa, del estado de la cuestión que va a abordar en el resto de la memoria. El mejor comentario que podemos hacer es simplemente una selección de sus frases más significativas, junto, una vez más, a la recomendación de leerla directamente:

> Las series que Fourier llama trigonométricas, es decir las series de la forma
>
> $$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$
>
> desempeñan un papel importante en aquellas partes de las matemáticas en las que aparecen funciones arbitrarias. Incluso puede afirmarse con motivo que los avances más esenciales en estas partes de las matemáticas, tan importantes para la física, han sido consecuencia de un mejor conocimiento de la naturaleza de estas series. Ya en las primeras investigaciones que condujeron a la consideración de funciones arbitrarias, se formuló la pregunta de si una tal función totalmente arbitraria puede ser expresada por medio de una serie como la anterior. Esto sucedió a mediados del siglo pasado, con ocasión de las investigaciones sobre las cuerdas vibrantes, en las que se ocuparon entonces los matemáticos más afamados. Sus concepciones sobre nuestro tema no pueden ser expuestas adecuadamente sin entrar en ese problema.

Riemann continúa escribiendo la ecuación de la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

y presenta la solución obtenida por D'Alembert, publicada en las Memorias de la Academia de Berlín (1747), y que consiste en la suma de una onda progresiva, $f(x - \alpha t)$, y otra regresiva $g(x + \alpha t)$. Y no tiene inconveniente en informarnos de que la solución de D'Alembert se obtiene a través del sencillo cambio de variables $(u = x - \alpha t, v = x + \alpha t)$, ahora tan conocido:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0\,.$$

Constituye una muestra del estilo de exposición directo, pedagógico y nada pedante que encontramos en sus escritos.

> Aparte de esta ecuación, que se deduce de las leyes generales del movimiento, $y(x, t)$ debe satisfacer todavía la condición de anularse en los puntos de sujeción de la cuerda: $y(0, t) = y(l, t) = 0$.
>
> $$\left.\begin{array}{l} f(-\alpha t) + g(\alpha t) = 0 \\ f(l - \alpha t) + g(l + \alpha t) = 0 \end{array}\right\}$$
> $$\Longrightarrow \quad f(z) = -g(-z) = -g(l - (l + z)) = f(2l + z)$$
>
> Luego
>
> $$\left\{\begin{array}{l} y = f(x - \alpha t) - f(-x - \alpha t) \\ f(x) = f(x + 2l) \end{array}\right.$$

Una vez que D'Alembert hubo establecido esto para la solución general del problema, se ocupó en una continuación de su memoria de la ecuación $f(z + 2l) = f(z)$; es decir, buscó expresiones analíticas que permanezcan invariantes cuando z aumenta en $2l$.

El comentario siguiente se refiere a Euler, quien publicó, también en las Memorias de la Academia de Berlín (1748), un artículo en el que desentraña la relación entre la función f de D'Alembert y los datos, posición y velocidad, que tenía la cuerda inicialmente. Pero pocos años más tarde, en 1753, y en las mismas Memorias, apareció una solución distinta debida a Daniel Bernoulli basada en la observación de que la función

$$y = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n \alpha\, t}{l}\right),$$

donde n es un entero, verifica la ecuación y las condiciones de contorno: $y(0,t) = y(l,t) = 0$.

> Sobre esta base explicó el hecho físico de que una cuerda pueda dar, además de su tono fundamental, también el tono fundamental de una cuerda de igual constitución pero de longitud l/2, l/3, l/4,... y consideró que su solución particular era general.
>
> La observación de que una cuerda pueda dar sus diferentes tonos simultáneamente, llevó a Bernoulli a considerar que la cuerda (según la teoría) también podría vibrar de acuerdo con la ecuación:
>
> $$y = \sum_n c_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n \alpha}{l}(t - \beta_n)\right)$$
>
> Y como todas las modificaciones observadas del fenómeno se podían explicar partiendo de esta ecuación, la consideró como la más general.

La polémica suscitada está bien descrita en la tesis y en ella terciaron, además de D'Alembert y Bernoulli, también Euler y Lagrange, entre otros. ¿Es posible representar una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica? D'Alembert lo negaba, mientras que Bernoulli creía que sí. Riemann lleva a cabo un análisis de las publicaciones de Euler y de Lagrange para concluir que estos dos grandes matemáticos de la Ilustración daban más la razón al primero que al segundo, al menos en el caso de las funciones arbitrarias, puesto que para las analíticas, o analíticas a trozos, Lagrange manifestó algunas dudas.

En el párrafo 2 de esta primera parte aparece Joseph Fourier, a quien Riemann rinde tributo en los términos siguientes:

> Transcurrieron casi cincuenta años sin que se lograra ningún avance esencial en la cuestión de la representabilidad analítica de las funciones arbitrarias. Entonces, una consideración de Fourier arrojó nueva luz sobre este

> tema. Fourier indicó que en la serie trigonométrica
>
> $$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)\,,$$
>
> los coeficientes pueden ser determinados mediante las fórmulas
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

El siguiente personaje destacado por Riemann es su maestro Gustav Lejeune Dirichlet, quien antes de ser profesor en Göttingen había estudiado con Fourier y con Poisson en la Universidad de París:

> Sólo en enero de 1829 apareció en el Journal de Crelle una memoria de Dirichlet, donde la cuestión de la representabilidad mediante series trigonométricas se decidía con todo rigor para el caso de funciones que admiten integración en todo el recorrido y que no tienen una cantidad infinita de máximos y mínimos.

Resulta enternecedor leer hoy los comentarios del gran Riemann acerca de la diferencia radical entre la convergencia absoluta y condicional de las series, pero que, sin ningún género de duda, era uno de los puntos claves de la cuestión dilucidada por Dirichlet:

> La idea del camino a seguir para la solución de este problema le vino al comprender que las series infinitas se dividen en dos clases absolutamente distintas, según que, al hacer positivos todos sus miembros, permanezcan convergentes o no. En las primeras los miembros pueden ser reordenados a voluntad, pero el valor de las últimas depende del orden que les demos. [...] Las leyes de las sumas finitas sólo son aplicables a las series de la primera clase; sólo ellas pueden realmente ser consideradas como la colección de todos sus miembros, no las series de la segunda clase; circunstancia que había pasado inadvertida a los matemáticos del pasado siglo, [...] Obviamente, la serie de Fourier no pertenece necesariamente a la primera clase.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

la serie de Fourier de una función f. Dirichlet escribió sus sumas parciales en la forma:

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-\alpha)\right)} d\alpha \end{aligned}$$

y demostró que convergen al valor $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ cuando la función f es monótona y continua en un número finito de intervalos. Dice Riemann:

> Dirichlet basa su demostración en dos teoremas:
>
> 1. Si $0 < c \leq \frac{\pi}{2}$, entonces
>
> $$\int_0^c \varphi(\beta)\, \frac{\sin((2n+1)\beta)}{\sin(\beta)}\, d\beta$$
>
> se aproxima infinitamente al valor $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ con n creciente.
>
> 2. Si $0 < b < c \leq \frac{\pi}{2}$, entonces
>
> $$\int_b^c \varphi(\beta)\, \frac{\sin((2n+1)\beta)}{\sin(\beta)}\, d\beta$$
>
> se aproxima infinitamente al valor 0 con n creciente.
>
> Supuesto que la función $\varphi(\beta)$, entre los límites de estas integrales, sea monótona, creciente o decreciente.
>
> Con la ayuda de estos dos teoremas se puede, obviamente, si la función f no pasa infinitas veces de aumentar a disminuir o de disminuir a aumentar, descomponer la integral
>
> $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\, \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-\alpha)\right)}\, d\alpha$$

> en una cantidad finita de miembros, de los cuales uno converge a $f(x+0)/2$, otro a $f(x-0)/2$, y los restantes convergen a 0, cuando n crece a infinito. De aquí se deduce que es representable, por medio de una serie trigonométrica, toda función que se repite periódicamente según el intervalo 2π y que:
>
> 1. admite integración en todo su recorrido;
> 2. no tiene infinitos máximos y mínimos;
> 3. y toma, donde su valor cambia por saltos, el valor medio entre los límites por ambos lados.
>
> Con el trabajo de Dirichlet obtuvieron un fundamento firme una gran cantidad de investigaciones analíticas importantes [...] Le fue dado resolver una cuestión que ocupara a tantos matemáticos distinguidos desde hacía más de setenta años. En realidad, para todos los casos de la Naturaleza, los únicos de que se trataba, quedó plenamente resuelta; pues por grande que sea nuestra falta de conocimiento acerca de cómo las fuerzas y estados de la materia varían según lugar y tiempo en lo infinitesimal, sin duda podemos siempre suponer que las funciones a las que no se extiende la investigación de Dirichlet no se dan en la Naturaleza.

En esto, como ahora sabemos, Riemann se equivocaba. Pero su error se justifica quizás por la devoción sentida hacia su maestro, que le indujo a sobreestimar la universalidad de los resultados obtenidos por Dirichlet. Mas a renglón seguido se enmienda con la siguiente afirmación:

> Los casos no resueltos por Dirichlet merecen atención por dos razones simples: en primer lugar, como Dirichlet mismo menciona al final de su memoria, este asunto está en la más estrecha conexión con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para traer dichos principios a una mayor claridad y precisión. Pero en segundo lugar, la utilidad de las series de Fourier no se limita a investigaciones físicas; hoy se ha aplicado con éxito también a un campo de la matemática pura, la teoría de los números, y aquí parecen ser de importancia precisamente

> aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no ha investigado Dirichlet.

2. Parte II: ***Sobre la noción de integral definida y el ámbito de su validez***

Habiendo pues planteado el problema y presentados sus antecedentes, el primer paso para ir más allá de lo obtenido por Dirichlet era dar sentido a las fórmulas de Fourier para funciones "arbitrarias". Escribe Riemann:

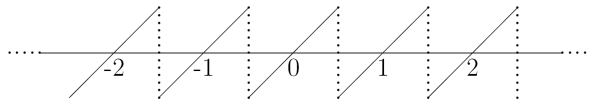
> La incertidumbre que aún reina en algunos puntos fundamentales de la teoría de las integrales definidas, nos fuerza a anteponer algunas consideraciones sobre el concepto de integral definida y el ámbito de su validez: ¿qué hay que entender por $\int_a^b f(x)dx$?

Para darle respuesta introduce la noción de integral de una función acotada a través de las sumas, ahora llamadas de Riemann, y da una condición necesaria y suficiente para que una tal función sea integrable, considerando la oscilación ω_j de la función en un intervalo I_j de una partición dada del dominio de integración. La condición necesaria y suficiente para que las sumas converjan, y por tanto f sea integrable, es que la suma total de las longitudes de los intervalos de la partición donde la oscilación supera a un número positivo dado pueda hacerse arbitrariamente pequeña con el diámetro de la partición. Años después el criterio adquirió su versión actual equivalente: f es integrable (Riemann) si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero. Es un hecho notorio que todas las monografías que se han escrito desde entonces para explicar el cálculo diferencial introducen esta definición de integral.

A continuación, en la tesis se presenta un ejemplo de una función que es integrable en el nuevo sentido y que, sin embargo, es discontinua en un conjunto denso de puntos. Es decir, que se trata de una extensión genuina de la noción de Cauchy de integrales de funciones continuas, o continuas a trozos. Sea

$$(x) = \begin{cases} x - m\,, & \text{si } |x-m| < 1/2; \\ 0\,, & \text{si } x = m + 1/2 \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

cuya gráfica es la función periódica en forma de dientes de sierra:



Entonces la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

tiene sus discontinuidades en los puntos racionales de la forma $a/2b$, $\mathrm{mcd}(a, 2b) = 1$, que son densos en toda la recta real. Además, a partir de la fórmula de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

es un ejercicio sencillo comprobar que

$$f^+\Big(\frac{a}{2b}\Big) - f^-\Big(\frac{a}{2b}\Big) = -\frac{\pi^2}{8b^2}\,.$$

Pero $f(x)$ está acotada por $\frac{\pi^2}{6}$ y es integrable, por cuanto sus discontinuidades son numerables. La función

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

resulta ser continua:

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \leq \frac{\pi^2}{6}\ h\,.$$

Sin embargo, carece de derivada precisamente en esos puntos $a/2b$, $\mathrm{mcd}(a, 2b) = 1$. Veamos:

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{F\big(\frac{a}{2b}+h\big) - F\big(\frac{a}{2b}\big)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{h}\int_{a/2b}^{a/2b+h} f(t)\ dt = f^+\Big(\frac{a}{2b}\Big)\,,$$

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{F\big(\frac{a}{2b}+h\big) - F\big(\frac{a}{2b}\big)}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{1}{h}\int_{a/2b}^{a/2b+h} f(t)\ dt = f^-\Big(\frac{a}{2b}\Big)\,.$$

Surge la pregunta: ¿existirá una función continua que carezca de derivada en todos sus puntos?

3. Parte III: ***Sobre la posibilidad de representar una función por una serie trigonométrica, sin hacer ninguna hipótesis sobre la naturaleza de la función***

> Mientras que los trabajos anteriores establecen proposiciones del tipo: "si una función goza de tal o cual propiedad, entonces puede ser desarrollada en serie trigonométrica", nosotros nos proponemos la cuestión inversa: "si una función es desarrollable en una serie de Fourier, ¿qué podemos inferir sobre la función, sobre la variación de sus valores cuando el argumento cambia de forma continua?"

Las ideas y las técnicas introducidas por Riemann para abordar esta cuestión han tenido, y siguen teniendo, una gran influencia en el desarrollo del Análisis Matemático, muy por encima, quizás, de la importancia de los resultados concretos obtenidos en esta sección. Un ejemplo notable es la generalización de la noción de derivada (derivada segunda), para la que se aportan dos posibilidades.

La función continua $F(x)$ tiene una derivada segunda en el punto x si existe el límite:

$$D^2F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}\,.$$

Observemos que si $F''(x)$ existe en el sentido de Newton y Leibniz, entonces tenemos que $D^2F(x) = F''(x)$. Pero el ejemplo

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0; \\ x^2 \sin\frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

muestra que podemos tener $D^2F(0)$, mientras que $F''(0)$ no está definida. Luego se trata de una genuina extensión de la noción de derivada segunda.

Riemann demuestra la proposición siguiente: si una función periódica $f(x)$, de periodo 2π, puede ser representada por una serie trigonométrica, entonces existe una función continua $F(x)$ tal que $D^2F(x) = f(x)$ en todo punto.

Además, se verifica la siguiente identidad:

$$\int_a^b D^2 F(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,\varphi''(x)\,dx$$

para toda función φ con dos derivadas continuas y que se anule fuera de (a,b).

Sería ocioso subrayar la importancia de esta noción, y su carácter precursor de las derivadas débiles de la teoría de distribuciones. La manera concreta en la que aparece la derivada débil es para obtener uno de los resultados notables de la tesis, el ahora llamado teorema de localización: la convergencia o divergencia de una serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$$

en un intervalo I depende sólo de la función

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$$

en ese intervalo.

Bajo la hipótesis $|a_n| + |b_n| = o(1)$, que Riemann deduce de la convergencia en todo x, demuestra que

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)-\frac{1}{2\pi}\int F(t)\,\varphi(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\sin\big(\frac{2N+1}{2}(x-t)\big)}{\sin\big(\frac{x-t}{2}\big)}\Big)\,dt$$

tiende a 0 cuando N tiende a infinito, para toda función $\varphi \in C_0^\infty(I)$ que sea idénticamente igual a 1 en un entorno del punto x.

Se debe a G. Cantor la detección del siguiente corolario del teorema de Riemann que es conocido como teorema de unicidad:

> *Supongamos que la serie trigonométrica*
>
> $$(*) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$$
>
> *converge al valor 0 en todo punto $x \in [0, 2\pi]$. Entonces todos los coeficientes son nulos.*

Observemos que si supiésemos de antemano que $(*)$ es la serie de Fourier de una función integrable ($a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$), entonces la solución sería muy fácil. Lo que convierte al resultado de Riemann en algo delicado es el hincapié en que $(*)$ sea una serie trigonométrica general, de la que carecemos de información alguna sobre sus coeficientes.

Permitiéndonos tan solo la licencia de trastocar un poco el orden del razonamiento y describir algunos pasos con la notación contemporánea, la arquitectura de la demostración de Riemann sería la siguiente:

- Paso 1.- Se demuestra que la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$$

en todo punto $x \in E$ (E de medida positiva) implica que

$$\lim_{n\to\infty}(|a_n| + |b_n|) = 0\,.$$

- Paso 2.- Con una doble integración se obtiene la función continua

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\,.$$

- Paso 3.- La hipótesis

$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)\Big) = 0$

implica que $D^2F(x) = 0$, para todo $x \in [0, 2\pi]$, donde $D^2F(x)$ designa a la derivada segunda generalizada de Riemann:

$$\begin{aligned} D^2F(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\Big[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)\,\Big(\frac{\sin(nh/2)}{nh/2}\Big)^2\Big]\,. \end{aligned}$$

- Paso 4.- Se comprueba que si $D^2G(x)$ existe y es estrictamente positiva en un intervalo, entonces G es convexa.

  Análogamente, si $D^2G(x) < 0$ en un intervalo, entonces G es cóncava.

Finalmente, si $D^2G(x) = 0$ en todo x, entonces $G(x)+\varepsilon x^2$ es convexa para todo $\varepsilon > 0$, luego también lo es G por ser un límite uniforme de funciones convexas. De manera análoga, $G(x)-\varepsilon x^2$ es cóncava y tomando límites cuando tiende a 0, obtenemos que G es cóncava.

Conclusión: $D^2G \equiv 0$ en un intervalo implica que G es cóncava y convexa, luego es lineal.

- Paso 5.- De los pasos anteriores obtenemos que

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

es lineal. En particular eso implica que $a_0 = 0$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \equiv 0$$

Pero esta última es la serie de Fourier de la función idénticamente nula y, por tanto, $a_n = b_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

Hasta la fecha no existe otra demostración, distinta de la dada por Riemann, del hecho fundamental de que si dos series trigonométricas convergen puntualmente al mismo valor, entonces son necesariamente idénticas. En el caso de varias variables existe la variante de tomar sumas parciales de diversos modos.

Cuando se consideran sumas esféricas, un resultado reciente de J. Bourgain [14] demuestra que el teorema de Riemann sigue siendo válido. Pero si consideramos las sumas en cubos la cuestión está todavía por decidir, concretamente:

En dimensión $n \geq 2$, tenemos series

$$f \sim \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_\nu \; e^{i\nu\cdot x}, \qquad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)\,.$$

Con la notación $\|\nu\|_\infty = \text{máx}(|\nu_1|, \ldots, |\nu_n|)$, podemos escribir las sumas parciales cúbicas

$$S_Nf(x) = \sum_{\|\nu\|_\infty \leq N} a_\nu \; e^{i\nu\cdot x}$$

Problema abierto: si existe $\lim_{N\to\infty} S_Nf(x) = 0$ en todo $x \in [0, 2\pi]^n$, ¿han de ser todos los coeficientes nulos necesariamente?

Como indicamos antes, Cantor se interesó por la tesis de Riemann y extendió el teorema de unicidad en el sentido siguiente: supongamos que la convergencia a cero de la serie trigonométrica la conocemos en todos los puntos salvo, quizás, por un conjunto finito para los que carecemos de información:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)\right]=0$$

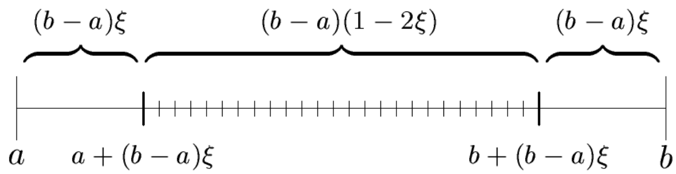
para todo $x \in [0,2\pi]-\{x_1,\ldots,x_p\}$. Cantor demostró que, también en este caso, la serie de partida ha de tener todos sus coeficientes nulos. ¿Qué ocurre si eliminamos un conjunto infinito? Se trata de una pregunta natural, pero muy difícil, que da lugar a una interesante definición. Diremos que $U \subset [0,2\pi]$ es un *conjunto de unicidad* si toda serie trigonométrica que converge puntualmente a 0 en el complemento de U ($[0,2\pi]-U$) ha de tener, necesariamente, todos sus coeficientes nulos. Con los métodos analíticos actuales resulta fácil comprobar que un conjunto de unicidad es de medida (Lebesgue) igual a cero. Pero el recíproco es falso: hay conjuntos de medida cero que no son de unicidad. Y esto es un hecho por lo menos inquietante, por cuanto implica la existencia de series trigonométricas que convergen en casi todo punto a una función integrable f sin coincidir con su serie de Fourier. En estos comienzos del siglo XXI sigue siendo un problema abierto caracterizar a los conjuntos de unicidad. No obstante Cantor demostró un resultado muy notable: una condición suficiente para que U sea de unicidad es que U_n, el conjunto derivado de orden n, sea vacío para algún entero positivo n.

Llama la atención que un problema tan concreto sobre las series trigonométricas llevase a Cantor a introducir conceptos tales como el de punto de acumulación y conjunto derivado. Y a crear la teoría de los cardinales transfinitos, de la que surgió, entre otros, el problema de la hipótesis del continuo. Un objeto importante es el conjunto de Cantor C_ξ de razón de disección $\xi<1/2$, que no es numerable, puesto que su cardinal es el de todos los reales, pero que, sin embargo, tiene medida igual a cero.

A partir de un intervalo $[a,b]$ obtenemos dos,

$$[a,a+(b-a)\xi]\cup[b-(b-a)\xi,b],$$

ambos de longitud $(b-a)\xi$.



Aplicado el proceso k veces a $[0, 2\pi)$, resultan 2^k intervalos de longitudes $2\pi\xi^k$ cuya unión designamos por $C_k(\xi)$. El conjunto de Cantor es la intersección de todos ellos:

$$C_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k(\xi)\,.$$

En el año 1922, Alexander Rajchman demostró que el conjunto ternario de Cantor ($\xi = 1/3$) es de unicidad. Su alumno, Antoni Zygmund, se doctoró en 1923 con una tesis sobre esta teoría, escribiendo posteriormente el libro *Trigonometric Series*, un clásico del Análisis Armónico del siglo XX, que está dedicado a Rajchman, su maestro, y a Marcinkiewicz, su discípulo, desaparecidos ambos trágicamente durante la Segunda Guerra Mundial. Del año 1955 es el siguiente resultado de R. Salem y A. Zygmund:

Teorema. *El conjunto de Cantor C_ξ es de unicidad si y sólo si $\theta = 1/\xi$ es un número de Pisot.*

Un número de Pisot θ es un entero algebraico cuyos conjugados algebraicos $\theta = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ verifican que $\theta = \theta_1 > 1$, $|\theta_2| < 1, \ldots, |\theta_n| < 1$. Estos números fueron definidos por su relación con los problemas de distribución uniforme módulo 1. Son ejemplos de números reales tales que las partes fraccionarias de sus potencias enteras no están uniformemente distribuidas en el intervalo unidad. La demostración de Salem y Zygmund es muy bella, puesto que conecta de forma precisa dos conceptos tan diferentes, *a priori*, como son la unicidad de las series y los números de Pisot. En la bibliografía sugerida ([7, 16, 17]) pueden encontrarse los detalles de la demostración.

4. Parte IV. *Ejemplos y contraejemplos*

Riemann utiliza el concepto de valor principal de una integral, introducido por Cauchy, para ampliar el conjunto de funciones que son integrables, yendo más allá de las acotadas. En esta parte de la tesis considera el ejemplo siguiente:

$$f(x) = \frac{d}{dx}(x^\nu \cos\frac{1}{x})\,, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi} f(x)\,dx = (2\pi)^\nu \cos\frac{1}{2\pi}$$

Sin embargo, observa a renglón seguido que:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\;dx \sim \frac{1}{2}\sin(2\sqrt{n}+\frac{\pi}{4})\sqrt{\pi}n^{(1-2\nu)/4}$$

Es decir, los coeficientes de su serie de Fourier se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, aquélla no puede ser convergente.

En sentido opuesto nos presenta a la función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n}\,,$$

donde, como antes, (x) representa la diferencia entre x y su entero más cercano. Luego escribe, sin dar la demostración, la identidad:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^i(n) - d^p(n)}{\pi n}\;\sin(\pi n x)\,,$$

siendo $d^i(n)$ el número de divisores impares de n y $d^p(n)$ el número de divisores pares de n.

Esta función está bien definida, es integrable Lebesgue, pero no es integrable a la Riemann, porque su oscilación se hace infinita en cualquier intervalo que consideremos.

Luego Riemann añade el comentario siguiente:

> Se obtiene un ejemplo del mismo tipo con las series
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\;\cos(n^2x) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n\;\sin(n^2x)$$

> cuando las cantidades positivas decrecientes $c_0, c_1, c_2 \ldots$ se hacen infinitamente pequeñas, pero para las cuales $\sum_k c_k$ se hace infinitamente grande.

Resultaría ocioso mencionar a las funciones Theta para motivar el interés de Riemann por este tipo de series. Pero creo interesante resaltar que en la tesis se mencione un asunto que sigue siendo un problema abierto en el análisis armónico, con aplicaciones aritméticas notables:

Si una función integrable (Lebesgue) tiene una serie de Fourier de la forma $\sum c_n e^{in^2x}$, ¿es cierto que $\|f\|_p \ll \|f\|_1$, para $1 < p < 4$?

Cuando los coeficientes forman una sucesión monótona decreciente (como en los ejemplos de Riemann) sabemos que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. Pero en el caso general, coeficientes arbitrarios, se ha mostrado hasta ahora muy difícil y elusiva.

De los ejemplos mostrados en la segunda parte de la tesis acerca de la relación entre continuidad y diferenciabilidad, se desprendía una pregunta natural a la que no se le dio respuesta: ¿existirá una función continua que carezca de derivadas en todos sus puntos?

K. Weierstrass encontró un ejemplo explícito de una función con esas características y lo presentó en una conferencia dada en la Academia de Ciencias de Berlín, el 8 de julio de 1872.

Consiste en una serie trigonométrica lacunar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\,,$$

donde a es un entero impar, $0 < b < 1$, de manera que $a \cdot b > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Según parece, K. Weierstrass descubrió el ejemplo anterior como consecuencia de su fracaso en demostrar una conjetura de Riemann. En su carta a Du Bois-Raymond decía que “hasta donde yo alcanzo a saber, Riemann ha afirmado que las funciones

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$$

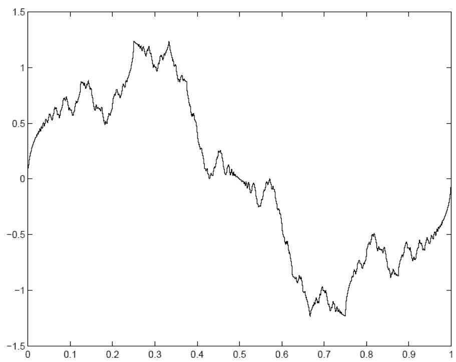
carecen de derivada en todos sus puntos". Aunque Riemann no había comunicado la demostración, sino que, en una cierta ocasión, había indicado que la prueba se podía hacer usando las funciones elípticas.

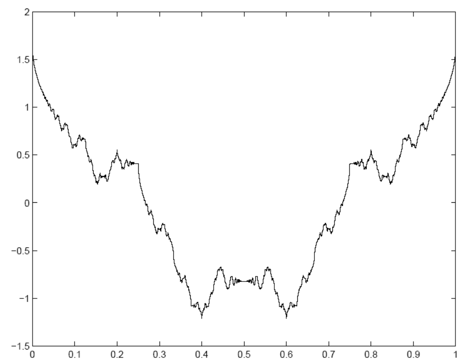
Cualquiera que se interese por la historia de esta notable función, puede comprobar con facilidad que se han publicado más de doscientos artículos sobre ella. En "Riemann's example of a continuous non-differentiable function in the light of two letters of Christoffel to Prym", publicado en 1986 en el Bulletin de la Socièté Mathématique de Belgique, los autores, P. Butzer y E. Stark, analizan hasta la saciedad la evidencia disponible acerca de si, en realidad, Riemann dijo, o no dijo, que la función carece de derivada en todos sus puntos. En mi opinión se trata de un ejemplo que muestra hasta qué extremos puede llegarse al hacer la historia de la ciencia. Seguramente es irrelevante discernir si Riemann afirmó, o no, tal cosa, excepto, quizás, por el posible morbo de encontrar una pifia menor en la obra de tan gran matemático. Habida cuenta de que muchos años después se encontraron puntos donde f es diferenciable. Lo cierto es que hallar una función continua carente de derivada en todos sus puntos era un problema natural e importante en esa época. También lo es que la función f, que está estrechamente relacionada con la función "theta", era un objeto matemáticamente muy interesante para Riemann, y para muchos otros y durante bastante tiempo después, como es el caso de G. Hardy y J. Littlewood, quienes la trataron en [11, 12]. Demostraron que las funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$$

carecen de derivada cuando x/π es irracional, o bien un racional cuya fracción reducida es de la forma $a/4b$, $a/(4b+1)$. Sin embargo, J. Gerver [9] demostró que tanto f como g son derivables en los $x = \pi a/q$, $\operatorname{mcd}(a, q) = 1$, cuando $q \equiv 2 \bmod 4$. Además el valor de las respectivas derivadas es -1 y 0, como se muestra en las figuras, obtenidas con la ayuda del ordenador, de la página siguiente.

Como dato curioso cabe reseñar que Gerver era un estudiante de primer curso en la universidad de Columbia (New York), y consiguió este resultado porque el profesor de Cálculo, S. Lang, había mencionado el problema en clase. Gerver lo resolvió y la demostración apareció en el American Journal of Mathematics (1970). De haber tenido acceso a las gráficas que ahora nos proporcionan los ordenadores, es seguro que tanto Riemann primero, como Hardy y Littlewood después, hubiesen previsto esos puntos de diferenciabilidad. Aunque en honor a Gerver hay que añadir que tampoco en el año 1970 existían los excelentes programas para dibujar funciones de los que ahora disponemos.





Un capítulo notable de las matemáticas contemporáneas es el de las geometrías fractales, que aparecen en el estudio de los sistemas dinámicos caóticos y en los modelos creados para entender los regímenes turbulentos en la mecánica de fluidos. Existen diversas nociones de dimensión fractal, una de ellas es la llamada dimensión por cajas, o dimensión de Minkowski.

Teorema ([13]). *La dimensión de Minkowski de las gráficas de las funciones f y g es 5/4.*

5. Epílogo

En las obras completas de Riemann, publicadas después de su muerte, encontramos el siguiente texto de R. Dedekind refiriéndose a esta tesis:

> Esta memoria fue presentada por su autor, en 1854, a la Facultad de Filosofía para obtener su Habilitación en la Universidad de Göttingen. Aunque el autor no parece haber tenido intención de publicarla, la impresión de este trabajo sin cambio alguno nos parece más que justificada, tanto por el considerable interés del tema en sí, cuanto

por la forma en la que son tratados los principios más importantes del análisis infinitesimal.

Brunswick, julio de 1867. R. Dedekind.

Habida cuenta de lo que hemos encontrado en su lectura (que incluye la formulación del problema de la unicidad de los desarrollos trigonométricos y su solución en un caso fundamental; la extensión de la noción de integral más allá de las definiciones de Newton, Leibniz y Cauchy; las generalizaciones de la noción de derivada, incluyendo una clara alusión al concepto de derivada débil del cálculo de distribuciones; los ejemplos de funciones continuas que carecen de derivada en conjuntos densos de puntos; y las diversas áreas futuras que supo entrever, como los fractales o la teoría de conjuntos de puntos), sorprende que Riemann no estuviese del todo satisfecho con su trabajo y que no se planteara su publicación.

Como no parece haber testimonio escrito del autor, sólo podemos especular acerca de sus motivos. Por un lado estaban los usos de aquella época, el "*pauca sed matura*" de Gauss, que debía imponer un tanto a un joven profesor de Göttingen. Pero eso no es todo y quizás sí podamos aventurar algunas de sus razones.

Por un lado Riemann había generalizado la noción de integral, pero para poder integrar funciones no acotadas tiene que hacer uso del "valor principal" y ahí aparece esa función $\frac{d}{dx}\left(x^\nu \cos \frac{1}{x}\right)$ que puede integrar entre 0 y 2π, pero resulta que sus coeficientes de Fourier no tienden a cero. Por otro lado se encuentra con series trigonométricas que convergen a una función f que no es integrable según su definición. Es claro que a Riemann esta situación no podía satisfacerle y, además, tampoco pudo demostrar que las series de Fourier de sus funciones integrables convergiesen de manera razonable. Ahora sabemos que estas cuestiones eran muy difíciles y, quizás, imposibles para aquella época; pensemos en la integral de Lebesgue; en el ejemplo de Kolmogorov de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto; en el teorema de Carleson, que es del año 1964; o en el problema todavía abierto de caracterizar los conjuntos de unicidad. No obstante, sí podemos afirmar que se trata de otra muestra de la profundidad y grandeza de Riemann: la insatisfacción por lo no realizado le impedía publicar los magníficos resultados que había conseguido.

Agradecimientos. Pablo Fernández Gallardo y Bernardo López Melero me ayudaron en la preparación de este escrito, leyendo su primera versión y haciendo sabias y oportunas sugerencias.

Referencias

[1] B. Riemann: *Gesammelte mathematische Werke* (ed. H. Weber y R. Dedekind). Primer edición, Leipzig, Teubner, 1876. Existe una edición más reciente, del año 1990, por Springer Verlag.
[2] B. Riemann: *Oeuvres mathématiques de Riemann*. Traducidas al francés por L. Laurel. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1968.
[3] B. Riemann: *Riemanniana selecta*. Edición de José Ferreirós. CSIC, 2000.
[4] D. Mascré: *Bernhard Riemann, posthumous thesis on the representation of functions by trigonometric series (1867)*. Landmark writings in western mathematics, 1640-1940. I. Grattan-Guinness (Editor). Elsevier, 2005.
[5] J. Fourier: *Theorie analytique de la chaleur*, 1822.
[6] G. Cantor: *Über trigonometrische Reihen*. Ges. Abh. Berlin, 1871.
[7] A. Zygmund: *Trigonometrics series*. Cambridge Univ. Press, 1959.
[8] K. Weierstrass: *Über continuierliche Functionen eines reellen Argumentes, die für keinen Werth des lezteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen*. Math. Werke II, 1895.
[9] J. Gerver: The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π. *Amer. J. Math.* **92** (1970), 33–55.
[10] P. Cohen: *Topics in the theory of trigonometrics series*. Ph. D. Thesis, University of Chicago, 1958.
[11] G. H. Hardy, J. E. Littlewwood: Some problems in diophantine approximation. *Acta Math.* **37** (1914), 193–238.
[12] G. H. Hardy: Weierstrass non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.* **17** (1916), 301–325.
[13] F. Chamizo y A. Córdoba: The fractal dimension of a family of Riemann's graphs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **317** (1993), no. 5, 455–460.
[14] J. Bourgain: Spherical summation and uniqueness of multiple trigonometric series. *Internat. Math. Res. Notices* **1996**, no. 3, 93–107.
[15] J. M. Ash and G. Wang: A survey on uniqueness questions in multiple trigonometric series. In *Harmonic analysis and nonlinear differential equations (Riverside, CA, 1995)*, 35–71. Contemp. Math. **208**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
[16] Y. Meyer: *Algebraic numbers and harmonic analysis*. North Holland, 1972.
[17] R. Salem: *Algebraic numbers and Fourier analysis*. D. C. Heath & Co., Boston, 1963.